MA 3111. Preguntas M.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función suave a trozos que cumple $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$. Su transformada de Fourier está dada por

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

Muestre que si $f(x)$ es una función par, entonces $g(w)$ también es una función par.

**SOLUCION**. Hay que probar $g(w) = g(-w)$ para todo $w$.

Sustituyendo $-w$ en vez de $w$ en ambos lados de la definición dada de $g(w)$ se obtiene

$$g(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx} dx$$

Hacer la sustitución $x = -u$ en la última integral. Notar que ésta sustitución intercambia los límites de integración. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} f(-u) e^{-iwu}\, d(-u) && (1)\\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-u) e^{-iwu}\, du && (2)\\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-u) e^{-iwu}\, du && (3)\\
\text{usando } f(u) = f(-u) & && (4)\\
&= g(w) && (5)
\end{aligned}$$

y listo.

2. Sea $G(w) = H(w)w$ la función rampa en el eje $w$. Esta función, vista como una función generalizada atemperada, es la transformada de Fourier de $F(x)$, otra función generalizada atemperada. La función $\phi(x) = e^{-x^2/2}$ está en el espacio de funciones de Schwartz. Calcule $< F, \phi >$. Sugerencia: use la relación conocida

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2} e^{-ixw} dw$$

**SOLUCION**. Sea $K$ una distribución atemperada. La transformada de Fourier de $K$ es la distribución atemperada $\hat{K}$ cuyo valor en una función de prueba $\phi(w)$ está dada por

$$< \hat{K}, \phi(w) >=< K, \hat{\phi} >$$

Notese que $\hat{\phi}$ es una función de $x$, pero es la transformada de Fourier *directa* de la función $\phi(w)$. Usando la definición de la primera pregunta

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(w) e^{-iwx}\, dw$$

En el caso bajo consideración, se quiere calcular $< F(x), e^{-x^2/2} >$. La formula dada en la pregunta dice que si $\phi(w) = \sqrt{2\pi} e^{-w^2/2}$ entonces $e^{-x^2/2} = \hat{\phi}$. Asi que tenemos que evaluar $< F, \hat{\phi} >$. Por la definición de transformada de Fourier citada arriba, $< F, \hat{\phi} >=< \hat{F}, \phi >=< G(w), \phi >$ puesto que $\hat{F} = G$. Pero

$$\begin{aligned}
< G(w), \phi > &= < wH(w), \phi > \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} wH(w)\sqrt{2\pi} e^{-w^2/2}\, dw \\
&= \sqrt{2\pi} \int_{0}^{\infty} we^{-w^2/2}\, dw \\
&= \sqrt{2\pi}. - e^{-w^2/2}|_0^\infty \\
&= \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

En resumen

$$< F, \phi >= \sqrt{2\pi}$$

3. En el semiplano superior $0 < y < \infty$, $-\infty < x < \infty$ se pide encontrar una función $u(x, y)$, acotada y $C^\infty$, que cumple la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y la condición de borde $\lim_{y\to 0} u(x, y) = p(x)$ donde $p(x) = 1$ en $-1 \le x \le 1$, $p(x) = 0$ fuera de $-1 \le x \le 1$.

   Encuentre $u(x, y)$. (Puede dejar su respuesta expresada en términos de una integral indicada.)

   **SOLUCION**.

   Método 1. Tomar la transformada de Fourier en $x$ de ambos lados en la ecuación de Laplace, es decir, multiplicar ambos lados por $e^{iwx}$ e integrar con respeto a $x$, entre $-\infty$ y $\infty$. Sea $\hat{u}(w, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)e^{iwx}\, dw$, la transformada de Fourier en una forma conveniente. Usando la regla $\hat{f''} = -w^2 f$, resulta

$$-w^2\hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0$$

Esta ecuación en derivadas parciales para $\hat{u}(w, y)$ tiene solución general $\hat{u} = A(w)e^{wy} + B(w)e^{-wy}$, donde $A(w), B(w)$ son funciones cualesquiera de $w$. La condición $u$ acotada para todo $x, y$ implica que $\hat{u}$ también está acotada para todo $y$, lo que implica $A(w) = 0$, si $w > 0$, y $B(w) = 0$, si $w < 0$. Amalgamando estas condiciones, se queda con la solución $\hat{u} = B(w)e^{-|w|y}$, donde la función $B(w)$ queda por escoger. Ahora, aplicando la antitransformada a $\hat{u}$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(w)e^{-|w|y}e^{-iwx}\, dw$$

de donde

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(w)e^{-iwx}\, dw$$

Pero se quiere $u(x, 0) = p(x)$. Esto se cumplirá siempre y cuando $B(w)$ sea la transformada de Fourier de $p(x)$, es decir

$$\begin{aligned} B(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{iwx}\, dx = \int_{-1}^{1} e^{iwx}\, dx \\ &= \frac{e^{iwx}}{iw}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{iw} \\ &= \frac{2\,\mathrm{sen}\, w}{w} \end{aligned}$$

de donde, finalmente

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|w|y + iwx}\frac{\mathrm{sen}\, w}{w}\, dw$$

Método 2.

Separar variables en Laplace: plantear $u(x, y) = X(x)Y(y)$, asi que $X''Y + Y''X = 0$ y se quiere que $u$ quede acotada. La ecuación da

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

de donde ambos lados son iguales a una constante, $\lambda$. Si $\lambda > 0$, sea $\lambda = w^2$, la solución para $X'' = w^2 X$ es $X(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}$, y puesto que $-\infty < x < \infty$, esta no puede quedar acotada. Asi pues $\lambda \leq 0$, sea $\lambda = -w^2$. Entonces $X = A\cos wx + B\,\mathrm{sen}\, wx$, para constantes arbitrarias $A, B$.La ecuación $Y'' = w^2 Y$ tiene solución general $Y = Ce^{wy} + Be^{-wy}$, para constantes arbitrarias $C, D$. Ahora, tenemos $0 \leq y < \infty$, asi que $Y$ qedará acotada siempre que $C = 0$, ,si $w > 0$. Hemos obtenido soluci'ones $u(w, x, y) = (A\cos wx + B\,\mathrm{sen}\, wx)e^{-wy}$, que satisface Laplace y es acotada en el semi-plano superior siempre que $w \geq 0$. Para hacer cumplir la condición de borde, se intenta la superposición

$$u(x, y) = \int_0^\infty A(w)\cos wx + B(w)\,\mathrm{sen}\, wx)e^{-wy}\, dw$$

donde $A(w), B(w)$ son funciones por determinar. Como $p(x)$ es par, se suprime $\mathrm{sen}\, wx$ y se intenta

$$u(x, y) = \int_0^\infty A(w)\cos wxe^{-wy}\, dw$$

que cumplira las condiciones de borde siempre que

$$u(x, 0) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\, dw = p_+(x)$$

donde $p_+(x)$ es la restricción de $p(x)$ al semi-eje positivo de $x$. Asi, $A(w)$ tiene que ser la transformada de Fourier coseno de $p(x)$, salvo factor constante. Sea

$$A^*(w) = \int_0^\infty p(x)\cos wx\, dx = \int_0^1 \cos wx\, dx$$

Entonces $A^*(w) = \dfrac{\mathrm{sen}\, w}{w}$, y, tomando la antitransformada

$$p(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, w}{w}\cos wx\, dw$$

y se ve que hay que tomar $A(w) = \dfrac{2}{\pi} A*(w)$, asi que, finalmente

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos wxe^{-wy}\frac{\mathrm{sen}\, w}{w}\, dw$$

Se puede verificar facilmente que ésta solución es identica con la primera dada.

4. (a) Encontrar todas las funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ de la forma $\phi(x,y) = f(r)\cos\theta$ que cumplen $\phi_{xx} + \phi_{yy} + \lambda\phi = 0$ con $\phi = 0$ para los puntos que están sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Como siempre, $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.)

   (b) La temperatura en el disco unitario $x^2+y^2 \leq 1$ vale $u(x,y,0) = x$ en $t = 0$. Se pide encontrar $u(x,y,t)$ para todo $t > 0$ sabiendo que $u$ satisface $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ en $x^2+y^2 < 1$, $t > 0$ y que $u(x,y,t) = 0$ en $x^2+y^2 = 1$. Exprese $u$ en términos de las funciones encontradas en la parte (a). Integrales donde aparezcan las funciones de Bessel pueden dejarse indicadas.

   **SOLUCION.**

   a). La pregunta es: hallar todas las autofunciones del Laplaciano en el disco unitario, que sean nulas en el borde del disco, y que tengan la forma $f(r)\cos\theta$. Segun la hoja informativa, esta autofunciones son $J_1(\alpha_{1m}r)\cos\theta$, puesto que todas las otras señaladas en la hoja, o bien no involucran $\cos\theta$, o bien involucran $\cos n\theta$ con $n > 1$. Es evidente, por definición de los $\alpha_{1,m}$ que estas funciones son nulas en $r = 1$. En resumen, las funciones buscadas son, en la notación de la hoja informativa

$$\psi^c_{1m}(r,\theta) = J_1(\alpha_{1m}r)\cos\theta$$

   b). Plantear una solución de la ecuación de calor separando la variable tiempo: $u(x,y,t) = E(x,y)T(t)$. La condición $u = 0$ en el borde del disco implica, para solución no-trivial, que $E(x,y) = 0$ en dicho borde. Sustituyendo en la ecuación del calor:

$$ET' = (\nabla^2 E)T$$

   donde $\nabla^2$ denota el Laplaciano 2-dimensional. Asi

$$\frac{\nabla^2 E}{E} = \frac{T'}{T}$$

   Ambos lados son pues iguales a una constante, $\lambda$, digamos. La ecuación $T' = \lambda T$ para $T$ tiene solución $T = Ae^{\lambda t}$, asi que $\lambda \leq 0$, o se tendria una solución que va al infinito con $t$, contradiciendo conservación de energia. Igualmente, mirando la otra ecuación $\nabla^2 E = \lambda E$ se puede decir que $\lambda$ es autovalor del Laplaciano en el disco para una función nula en el borde, y luego es negativo o bien por la información de la hoja informativa o bien por un teorema general. Usando otra vez la hoja informativa, las soluciones para $E$ son las funciones $\psi^c_{nm}(r,\theta)$, $\psi^s_{nm}(r,\theta)$. En principio, se buscaria una superposición de todas estas funciones que satisfaga la condición inicial $u(x,y,0) = x = r\cos\theta$. Pero $r\cos\theta$ es ortogonal a todas las $\psi^c_{n,m}, \psi^s_{n,m}$ salvo las $\psi^c_{1,m}$ (mirar la integral en $\theta$). Por consiguiente, podemos poner $u_m(x,y,t) = \psi^c_{1,m} e^{-\alpha^2_{1,m} t}$ y plantear

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(x,y,t)$$

donde los las constantes $c_m$ quedan por determinar. Pero

$$u(x,y,0) = r\cos\theta = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(x,y,0)$$

o sea

$$r\cos\theta = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi^c_{1,m}$$

Usando ortogonalidad de los $\psi^c_{1,m}$ en el disco, se tiene

$$c_m = \frac{< r\cos\theta, \psi^c_{1,m} >}{< \psi^c_{1,m}, \psi^c_{1,m} >}$$

donde

$$< f, g >= \int\int_D fg dA$$

El producto interior en el denominador es $\frac{\pi}{2} J_1'(\alpha_{1,m})^2$, según la hoja informativa. El del numerador es

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r\cos\theta J_1(\alpha_{1,m} r) r dr d\theta$$

Usando $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$ se obtiene que la integral doble vale $\pi \int_0^1 J_1(\alpha_{1,m}) r^2 dr$. Se supone, según instructivo en el examen, que esto se puede dejar indicado, dando como respusta final

$$c_m = \frac{2 \int_0^1 J_1(\alpha_{1,m}) r^2 dr}{J_1'(\alpha_{1,m})^2}$$

El interesado puede notar que, haciendo la sustitución $s = \alpha_{1,m} r$, la integral se reduce a una integral de $s^2 J_1(s)$ cuya primitiva, según la hoja informativa, es $s^2 J_2(s)$, asi que finalmente

$$c_m = \frac{2}{\alpha_{1,m}} \frac{J_2(\alpha_{1,m})}{(J_1'(\alpha_{1,m}))^2}$$

Resultados Varios

Si
$$g(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx,$$
entonces
$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(w)e^{iwx}dx.$$

$$e^{ir\,\mathrm{sen}\,w}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{inw}.$$

$$r^2J_n''(r)+rJ_n'(r)+(r^2-n^2)J_n(r)=0.$$
$$r^{n+1}J_n(r)=\frac{d}{dr}(r^{n+1}J_{n+1}(r))$$

Si $\alpha_{nm}$ es el $m$-ésimo cero de la función de Bessel de orden $n$ entonces las funciones

$$\begin{aligned}\psi_m(r,\theta) &= J_0(\alpha_{0m}r),\\ \psi_{nm}^s(r,\theta) &= J_n(\alpha_{nm}r)\ \mathrm{sen}\,n\theta,\\ \psi_{nm}^c(r,\theta) &= J_n(\alpha_{nm}r)\ \cos n\theta,\end{aligned}$$

cumplen con
$$\Delta\psi_{nm}+\alpha_{nm}^2\psi=0$$
y
$$|\,\psi_m\,|^{\,2}=\pi(J_0'(\alpha_{0m})^2,$$
$$|\,\psi_{nm}^s\,|^{\,2}=|\,\psi_{nm}^c\,|^{\,2}=\frac{\pi}{2}(J_n'(\alpha_{nm}))^2.$$